数理解析研究所講究録
377巻 1980年 23-49

Invariant subspace problemに関連した dominant operatorについての最近の結果

琉球大教育　呉屋永徳
東北大教養　斎藤禎四郎

§1．序論　1976年にStampfli－Wadhwa [13]によってはじめられたdominant operatorの理論は，その後Dunfordのlocal spectral theoryとquasi-affine transformと関連するものとして，多くの人々によって研究されている。この問題はそれまでのStampfli [12]，Putnam（[5]，[6]，[7]）等によるhyponormal operatorの研究の発展として興味深い。ここではその生い立ちから最近までの結果を整理し，主として次の2点にしぼって述べることにする。

(1)　dominant operator Tのquasi-affine transform，すなわち $TW = WS$（W；1：1でdense rangeをもつ）またはその類似的変換における結果

(2)　spectral subspace $X_T(\delta)$がTのnontrivialな不変部分空間となる条件について，Stampfli，Radjabalipour， Clanceyの結果を総合的にまとめたもの

§2. まずdominant operatorの生い立ちから述べよう。

$B(H)$をヒルベルト空間H上のbounded operatorの作る代数とする。$T\in B(H)$については次の記号を用いる。

$\sigma(T)$; Tのspectrum

$\rho(T)$; Tのresolvent $=\mathbb{C}\setminus\sigma(T)$

$\sigma_p(T)$; Tのpointspectrum

$\sigma_c(T)$; Tのcontinous spectrum

$\text{range}\,[T]=\{Tx\mid x\in H\}$

$\ker\,[T]=\{x\in H\mid Tx=0\}$

$T,\ S\in B(H)$について、Douglas [3] は次の三つの命題は同値であることを示した。

(1) $\text{range}\,[T]\subseteq\text{range}\,[S]$.

(2) $\exists\,\mu\geq 0$; $TT^*\leq\mu^2SS^*$ $(\Longleftrightarrow \|T^*x\|\leq\mu\|S^*x\|\ (\forall x\in H))$.

(3) $\exists\,C\in B(H)$; $T=SC$, $\|C\|\leq\mu$.

Tがhyponormal operatorならば、$\forall\lambda\in\sigma(T)$に対して、$\|(T-\lambda)^*x\|\leq\|(T-\lambda)x\|$ $\forall x\in H$が成立つ。これは(2)において、T, S, μがそれぞれ$(T-\lambda)$, $(T-\lambda)^*$, 1となった特別の場合であるから、Douglasの(1), (2)の同値性より

(4) $\text{range}\,[(T-\lambda)]\subseteq\text{range}\,[(T-\lambda)^*]$ $(\lambda\in\sigma(T))$

が成立つ。(4)をみたすoperator TをStampfli - Wadhwa [13]

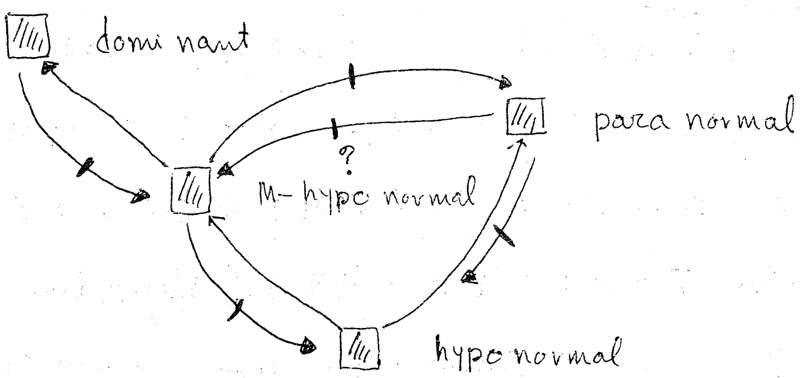
はdominantと名ずけた。(4)は$\lambda \in \rho(T)$に対しては常に成立つからDouglasの結果により，

T dominant $\Longleftrightarrow$ (5) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\exists M_\lambda \geqq 0$; $\|(T-\lambda)^* x\| \leqq M_\lambda \|(T-\lambda)x\|$ ($\forall x \in H$).

である。$\{M_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$として特に有界なものがとれるとき，すなわち$\exists M \geqq 0$; $\|(T-\lambda)^* x\| \leqq M \|(T-\lambda)x\|$ for all $x \in H$ ($\forall \lambda \in \mathbb{C}$)のとき，operator TをM－hyponormalという。hyponormal operatorは1－hyponormal operatorのことである。Tがhyponormal operatorのとき，

(6) $\|Tx\|^2 \leqq \|T^2 x\| \|x\|$ ($\forall x \in H$)

となるが，(6)が成立するoperator Tはparanormalと呼ばれている。hyponormal operator，M－hyponormal operator，dominant operator，paranormal operatorの関係を図示すれば次の通り（T. Saito [11], Stampfli－Wadhwa [13], [15]）



T を dominant operator とすれば，(5) より $\overline{\sigma_p(T)} \subset \sigma_p(T^*)$ である．ここで $\overline{\sigma_p(T)} = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma_p(T)\}$（$\bar{\lambda}$ は λ の共役複素数）である．よって $\lambda \in \sigma_p(T)$ ならば $\mathfrak{M}_\lambda = \ker[T-\lambda]$ は T の reducing subspace で，$\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$，$\lambda \neq \mu$ ならば $\mathfrak{M}_\lambda \perp \mathfrak{M}_\mu$ となる．従って $\mathfrak{M} = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \mathfrak{M}_\lambda$ は T の reducing subspace で，

$$T = T/\mathfrak{M} \oplus T/\mathfrak{M}^\perp$$

とかける．ここに $T/\mathfrak{M}$ は normal operator で $T/\mathfrak{M}^\perp$ は dominant で，$\sigma_p(T/\mathfrak{M}^\perp) = \phi$ である．

dominant operator T の取扱いにおいて，normal な部分 $T/\mathfrak{M}$ の処理がたえず問題になる．Putnam [5] はこの面で極めて重要な役割を演ずる．実際それより導かれる次の結果は正に dominant operator を論ずるときの要である．

Theorem A　$T = \int \lambda E(d\lambda)$ を normal operator T のスペクトル分解で $\delta \subset \mathbb{C}$ を closed とする．このとき，

(a) $\bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}\setminus\delta} \overline{\mathrm{range}[(T-\lambda)]} = E(\delta)H$ $(= X_T(\delta) = \text{spectral subspace})$

(b) $f : \mathbb{C}\setminus\delta \longrightarrow H$ への function，$(T-\lambda)f(\lambda) \equiv x$ ならば，$\exists$ analytic funct. $g : \mathbb{C}\setminus\delta \longrightarrow H$ s.t. $(T-\lambda)g(\lambda) \equiv x$ である．

注意　(b) において f に有界性を仮定すれば dominant operator T に対しても (b) は成立つ（Stampfli – Wadhwa [14]）．

§3．ここでは quasi-affine transform の問題を取扱う．$W \in B(H)$ が injective で dense range をもつとき，quasi-affinity という。$S \in B(H)$ が $T \in B(H)$ の quasi-affine transform とは $TW = WS$ となる quasi-affinity W が存在するときをいう。$TW = WS$ (T : dominant) とする。W が dense-range をもつか，または quasi-affinity のとき S の性質がどの程度 T に伝わるかを調べよう。まず S が normal のときから始める。

Theorem 1 (Stampfli - Wadhwa [13])

(1) $T,\ S \in B(H)$ で，T が dominant operator で S は normal operator とする。

(2) $TW = WS$ で，$W \in B(H)$ は dense range をもつとする。

このとき，

(1) $W^*WS = SW^*W$ で T は normal operator である。

(2) W が quasi-affinity ならば，T と S はユニタリー同値である。

証明　まず $W^*WS = SW^*W$ を示そう。$S = \int \lambda\, E(d\lambda)$ を normal S のスペクトル分解で $\delta \subset \mathbb{C}$ を closed とし，$S_\delta = S/E(\delta)H$ とする。$\sigma(S_\delta) \subset \delta$ であるから $\rho(S_\delta) \supset \mathbb{C}\backslash\delta$ となる。よって $\forall x \in E(\delta)H$ に対して，$f(\lambda) = (S_\delta - \lambda)^{-1}x$ は $\mathbb{C}\backslash\delta$ 上の analytic function でかつ，$(S-\lambda)f(\lambda) \equiv x$ である。条件 (2) より

$$(T-\lambda)Wf(\lambda) = W(S-\lambda)f(\lambda) \equiv Wx \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C}\backslash\delta)$$

である。このことと T の dominant 性より

$$Wx \in \mathrm{range}\,[(T-\lambda)] \subseteq \mathrm{range}\,[(T-\lambda)^*] \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C}\setminus\delta)$$

となり，$Wx = (T-\lambda)^* y_\lambda$ （$\lambda \in \mathbb{C}\setminus\delta$）とかける。条件(2)と S の normal 性より

$$W^*Wx = W^*(T-\lambda)^* y_\lambda = (S-\lambda)^* W^* y_\lambda \in \mathrm{range}\,[(S-\lambda)^*]$$

$$= \mathrm{range}\,[(S-\lambda)] \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C}\setminus\delta)$$

である。よって Theorem A (a) により

$$W^*Wx \in \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}\setminus\delta} \mathrm{range}\,[(S-\lambda)] = E(\delta)H \quad (\forall x \in E(\delta)H)$$

となり，$E(\delta)W^*Wx = W^*Wx$ （$\forall x \in E(\delta)H$）を得る。従って，

$$W^*W\,E(\delta) = E(\delta)\,W^*W\,E(\delta) = E(\delta)\,W^*W$$

となる。これはすべての open set δ に対しても成立つから spectral measure $E(\cdot)$ の regularity により $W^*WS = SW^*W$ となる。また，W が dense range をもつことと，

$$W^*TW = W^*WS = SW^*W$$

より，$W^*T = SW^*$ または $T^*W = WS^*$ を得る。T の normality と結論(2)の証明はもっと一般的な設定のもとで Theorem 6 で取扱う。

注意(1)　Theorem において W が dense range をもつという仮定はおとせない。

(2)　$SW = WT$ のとき，S が normal で T が dominant でも T が normal になるとは限らない。（Stampfli - Wadhwa [13]）.

次に S が cohyponormal（すなわち S^* が hyponormal）operatorのときはどうなるか。

Theorem 2 (Stampfli – Wadhwa [14])

(1) T, $S \in B(H)$で，Tが dominant operator で S は co-hyponormal operator とする。

(2) $TW = WS$ で $W \in B(H)$ は 1:1 かつ dense range をもつとする。このとき，

T, S はユニタリー同値な normal operator である。

証明 S の normality を示せばよい。S^* は hyponormal であるから，$SS^* - S^*S = D^2$ $(D \geqq 0)$ とかける。$D = 0$ を示せばよい。$\forall \lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$D^2 \leqq (S-\lambda)(S-\lambda)^*$ であるから Douglas の同値性より $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$D = (S-\lambda)C_\lambda$，$\|C_\lambda\| \leqq 1$ となる $C_\lambda \in B(H)$ が存在する。$D \neq 0$ ならば，$x = Dy \neq 0$ となる x, $y \in H$ がある。$f(\lambda) = C_\lambda y$ とおけば，$f(\lambda)$ は $\mathbb{C}$ 上の有界なベクトル値関数で，$(S-\lambda) f(\lambda) \equiv x$ である。条件(2)より，$(T-\lambda) W f(\lambda) \equiv Wx$ $(\forall \lambda \in \mathbb{C})$ で $Wf(\lambda)$ は有界だから，Theorem A 注意により $\mathbb{C}$ 上で analytic なベクトル値関数 $g(\lambda)$ があって，$(T-\lambda) g(\lambda) \equiv Wx$ である。$|\lambda| > \|T\|$ ならば，$g(\lambda) = (T-\lambda)^{-1} Wx$ で $\lim_{\lambda \to \infty} (T-\lambda)^{-1} Wx = 0$ だから Liouville の定理により $g(\lambda) \equiv 0$ となり $Wx = 0$ または $x \in \ker[W]$ を得る。W は 1:1 であるから $x = 0$ となって仮定に反する。

Radjabalipour は S の normality は次の Theorems 3，4 の

ように若干条件をゆるめても導けることを示した。

Theorem 3 (Radjabalipour [9])

S が co M-hyponormal (すなわち S^* が M-hyponormal) operator でも Theorem 2 の結果は成立つ。

略証 Radjabalipour [9] により，十分小さい $k>0$ に対して，$(S-\lambda)(S-\lambda)^* \geq (k|SS^*-S^*S|)$ $(\forall \lambda \in \mathbb{C})$ が成立つ。したがって $D=k|SS^*-S^*S|$ として Theorem 2 の証明をくり返せば $D=0$ となる。

Theorem 4 (Radjabalipour [8])

Theorem 2 において W の $1:1$ の仮定を $\dim(\ker[W])<+\infty$ でおきかえても S は normal operator となる。

略証 Theorem 2 の証明において $x=Dy$ のとき，$x=0$ を示せばよい。$x\in\ker[W]$ は示されている。y を含み T, S, W, D を reduce する H の可分的な subspace は存在するから，あらかじめ H を可分的と仮定することが出来る。実際 M を $\{T, T^*, S, S^*, W, W^*, D, I\}$ で生成された代数的半群とするとき，M は可算集合で，H_1 を $\{Ky \mid K\in M\}$ を含む最小の closed subspace とするとき，H_1 が求める可分的な subspace である。H の可分性と T の dominant 性より $\sigma_p(T)$ は可算集合である。また $\ker[W]$ は S－不変部分空間であるから，$S_1=S/\ker[W]$ で $h(\lambda)=(S_1-\lambda)^{-1}x$ とおけば，$h(\lambda)$ は $P(S_1)$ 上の

analytic function で，f の有界性と $\sigma_p(T)$ の可算性より $h(\lambda)$ は $\rho(S_1)$ 上で有界となり，$\sigma(S_1)$ は有限集合だから $\mathbb{C}$ 上で analytic となる。再び Liouville の定理により $h(\lambda)\equiv 0$ となる。よって $x=0$ を得る。詳細は Radjabalipour [8] 参照

Theorem 1 の問題 $TW=WS$ において，T を dominant とするとき，S の normality から T の normality を導くには W が dense range をもつことが必要だった。ここでは W にどれだけの条件があれば，$\dim(\ker[W])<+\infty$ だけから W に dense range を仮定せず T の normality が導けるかを考えてみる。

Theorem 5　$TW=WS$ で T が dominant operator で，S は co M-hyponormal（すなわち S^* が M-hyponormal）operator とする。このとき，W が normal operator で，$\dim(\ker[W])<+\infty$ ならば，T, S は共に normal operator である。

証明　Theorems 3, 4 より S は normal である。T の normality を示そう。$\mathfrak{M}=\overline{WH}\ (=\overline{W^*H})$ とおけば $\mathfrak{M}^\perp=\ker[W]$ である。$TW=WS$ より $\mathfrak{M}^\perp$ は S－不変な部分空間である。$S/\mathfrak{M}^\perp$ は dominant で $\dim(\mathfrak{M}^\perp)<+\infty$ だから，$S/\mathfrak{M}^\perp$ は normal となる。Lemma 2 in [3] により，$\mathfrak{M}^\perp$ すなわち $\mathfrak{M}$ は S の reducing subspace である。$\mathfrak{M}$ は T, S, W－不変な部分空間であるから，$(T/\mathfrak{M})(W/\mathfrak{M})=(W/\mathfrak{M})(S/\mathfrak{M})$ となる。$S/\mathfrak{M}$ は normal で $T/\mathfrak{M}$ は dominant で，$W/\mathfrak{M}$ は dense range をもつから Theorem 1 によって $T/\mathfrak{M}$ は normal となる。よって $\mathfrak{M}$ は T の reducing subspace となる。また，$T/\mathfrak{M}^{\perp}$ は dominant で，$\dim(\mathfrak{M}^{\perp}) < +\infty$ だから $T/\mathfrak{M}^{\perp}$ は normal となり，$T = T/\mathfrak{M} \oplus T/\mathfrak{M}^{\perp}$ も normal となる。

Stampfli－Wadhwa は Theorem 1 を証明した後で次の問題を提示した。

$TW = WS$ で T は hyponormal で S は cohyponormal とするとき，W が dense range を持てば，T は normal となるか。

この問題は Theorem 2 によって肯定的に解決されている。実際 $TW = WS$ より $S^{*}W^{*} = W^{*}T^{*}$ で S^{*} は hyponormal，T^{*} は cohyponormal で W^{*} が 1:1 となるからである。Theorems 3，4，5 によって更に次の結果が証明できる。

Corollary　$TW = WS$ で T は M－hyponormal operator で S^{*} を dominant operator とする。このとき，

$\dim(\ker[W^{*}I]) < +\infty$ ならば，T は normal operator である。更に W が normal operator ならば S も normal operator である。

証明　$TW = WS$ より $S^{*}W^{*} = W^{*}T^{*}$ となる。前半は Theorems 3，4 より後半は Theorem 5 より得られる。

再び $TW = WS$ (W ; dense range) を考える。この条件のもとでは，

$$W^{*}WS = SW^{*}W \Longleftrightarrow T^{*}W = WS^{*}$$

である。従って Theorem 1 により T が dominant で S が normal ならば，Putnam－Fuglede 型の結果すなわち，

$TW = WS$ ならば $T^*W = WS^*$

が得られる。S が coisometry で T が paranormal のときも同じ結果が得られるが S が normal のときは未解決である。ここでは $TW = WS$ と $T^*W = WS^*$ の条件を対にして考えたとき，S の性質がどの程度 T に伝わるかを調べる。次の定理の証明と応用については斎藤氏の「DENSE RANGE をもつ作用素による INTERTWINING」を参照。

Theorem 6　$T, S, W \in B(H)$ で W は dense range をもち，$TW = WS$，$T^*W = WS^*$ をみたすとする。このとき，次の命題が成立つ。

(1)　S が hyponormal（または cohyponormal）ならば，T も hyponormal（または cohyponormal）である。

(2)　S が isometric（coisometric）ならば，T も isometric（coisometric）である。

(3)　S が normal（または unitary）ならば，T も normal（または unitary）である。

注意　W が quasi-affinity ならば，T と S はユニタリー同値である。

§4．不変部分空間の問題を取扱う．dominant operator T

は single-valued extension property（略して S.V.E.P. とかく）をもつ。すなわち，任意の open set $D_f \subset \mathbb{C}$ 上の analytic なベクトル値関数 f に対して，$(T-\lambda)f(\lambda) \equiv 0$ ならば，$f(\lambda) \equiv 0$ である。よって $\forall$ closed set $\delta \subset \mathbb{C}$ に対して T-不変な linear manifold である spectral subspace $X_T(\delta)$ は定義されるが，どんな T と δ に対して $X_T(\delta)$ は T の non trivial な不変部分空間になるか。ここではこの問題を考える。以後特にことわらないかぎり T は dominant とし，$\delta \subset \mathbb{C}$ は closed とする。まずいくつかの定義を述べよう。詳細は [1]，[4] 参照。

定義　$x \in H$ とし，f を平面上の open set D_f ($\supset \rho(T)$) 上の analytic なベクトル値関数で，$(T-\lambda)f(\lambda) \equiv x$ とする。かかる f の中で D_f の最大のものを $\hat{x}(\lambda)$ とかく。$\rho_T(x) = D_{\hat{x}}$ を x のレゾルベント set，$\sigma_T(x) = \mathbb{C} \setminus \rho_T(x)$ を x のスペクトラムという。またすべての $x \in H$ と $\lambda \in \rho_T(x)$ に対して，

$$\|\hat{x}(\lambda)\| \leq \frac{\|x\|}{\mathrm{dist}[\lambda, \sigma_T(x)]}$$

が成立つとき，T は local growth condition（略して (L.G.C.) とかく）をみたすという。T が (L.G.C.) をみたせば，$\sigma(T)$ に対する通常の growth condition (G_1) をみたすことは明らかである。$X_T(\delta) = \{ x \in H : \sigma_T(x) \subset \delta \}$ によって spectral-subspace を定義すれば，容易に $X_T(\delta) = \{ x \in H : (T-\lambda)g(\lambda) \equiv x$ をみたす $\mathbb{C} \setminus \delta$ 上の analytic なベクトル値関数 $g(\lambda)$ が存在$\}$

であることがわかる。また，すべての δ に対して $X_T(\delta)$ が closed のとき，T は Dunford の条件(C)をみたすという。このとき，次の結果が知られている。

proposition 7　(3.8. proposition in [1] p.23)

T が条件(C)をみたすならば，$\sigma(T/X_T(\delta)) \subset \delta \cap \sigma(T)$ である。特に $\delta \subsetneqq \sigma(T)$ ならば，$X_T(\delta) \neq H$ である。

$X_T(\delta) \neq \{0\}$ となる条件を求めるために Stampfli - Wadhwa [14] は次の問題を提示した。

どんな operator T に対して，

(1)　$x \in \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \delta} \text{range}\,[(T-\lambda)]$ ならば $\sigma_T(x) \subset \delta$（すなわち $x \in X_T(\delta)$）か。

この命題は次の(2)，(3)の命題と同値である。

(2)(R)　$(T-\lambda) f(\lambda) \equiv x$ となる $\mathbb{C} \setminus \delta$ 上のベクトル値関数 $f(\lambda)$ があれば，$(T-\lambda) g(\lambda) \equiv x$ となる $\mathbb{C} \setminus \delta$ 上の analytic なベクトル値関数 $g(\lambda)$ があるか。

(3)　$\bigcap_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \delta} \text{range}\,[(T-\lambda)] = X_T(\delta)$ か。

(2)の次の(R)は置き換え Replacement の頭文字である。T が(1)，(2)，(3)のいずれか，一つをみたすとき，T は条件(R)をみたすということにすれば，以上の結果は次のようにまとめることが出来る。

proposition 8. Operator T が条件(C)，(R)をみたせば，$X_T(\delta) = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \delta} \text{range}\,[(T-\lambda)]$ である。特に $\bigcap_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \delta} \text{range}\,[(T-\lambda)] \neq \{0\}$

となる $\delta \subsetneqq \sigma(T)$ があれば，$X_T(\delta)$ は T の nontrivial な不変部分空間である。

さて一体どんな operator T が条件(C)，(R)をみたすだろうか。Stampfli [12]，Radjabalipour [8]，Clancey [2] は T が (L.G.C.) をみたせば，T は条件(C)，(R)をみたし，更に，Stampfli－Radjabalipour は $\sigma_p(T)=\phi$ となる hyponormal operator T は (L.G.C.) をみたすことを示した。以下順を追ってこの結果を紹介する。まず (L.G.C.) の問題から始めよう。

Lemma 9 (Stampfli [12]，Radjabalipour [8])

$T \in B(H)$ を hyponormal で $\sigma_p(T)=\phi$ とする。このとき，$\lambda_0 \in \rho_T(x)$ で $\|x\|=1$ ならば $\|(T-\lambda_0)^{-1}x\|^n \leq \|(T-\lambda_0)^{-n}x\|$ $(n=1,2,\cdots)$

証明　部分的には別証を試み証明をより単純にする。（Stampfli，Radjabalipour の結果と比較せよ。）次の (1)，(2) を示せばよい。

(1)　$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty}(T-\lambda_0)^k H$ である。

(2)　$y \in \bigcap_{k=1}^{\infty}(T-\lambda_0)^k H$ で $\|y\|=1$ ならば，$\|(T-\lambda_0)^{-1}y\|^n \leqq \|(T-\lambda_0)^{-n}y\|$ $(n=1,2,\cdots)$ である。

(1) の証明　$(T-\lambda)\hat{x}(\lambda) \equiv x$ $(\lambda \in \rho_T(x))$ であるから，両辺を λ で微分すれば，$(T-\lambda)\hat{x}'(\lambda) = \hat{x}(\lambda)$ となり，$(T-\lambda)^2\hat{x}'(\lambda) \equiv x$ $(\lambda \in \rho_T(x))$ を得る。induction により $(T-\lambda)^{k+1}\hat{x}^{(k)}(\lambda) \equiv k!\,x$

($\lambda \in P_T(x)$)を得る。よって $(T-\lambda_0)^{k+1}\hat{x}^{(k)}(\lambda_0) = k!x$ から(1)を得る。

(2)の証明　いくつかの場合にわけて考える。

(i)　$P_{\lambda_0}: (T-\lambda_0)H \longrightarrow \overline{(T-\lambda_0)H}$ への map で，$(T-\lambda_0)^* P_{\lambda_0} y = y$ for all $y \in (T-\lambda_0)H$ とする。P_{λ_0} の存在を示そう。$(T-\lambda_0)H \subseteq (T-\lambda_0)^*H$ だから，$\forall y \in (T-\lambda_0)H$ に対して，$y_1 \in [\ker[(T-\lambda_0)^*]]^{\perp} = \overline{(T-\lambda_0)H}$ が一意に存在して，$y = (T-\lambda_0)^* y_1$ とかける。$P_{\lambda_0} y \overset{\mathrm{def}}{=} y_1$ とすればよい。

(ii)　$\| P_{\lambda_0} y \| \le \| (T-\lambda_0)^{-1} y \|$ for all $y \in (T-\lambda_0)H$ である。

実際 $\forall y_1, y_2 \in (T-\lambda_0)H$ に対して，

$$\langle P_{\lambda_0} y_1, y_2 \rangle = \langle y_1, (T-\lambda_0)^{-1} y_2 \rangle \quad (2\text{-}1)$$

である(hint : $y_0 = (T-\lambda_0)^{-1} y_2$ とおいて，$y_2 = (T-\lambda_0) y_0$ と(i)の結果を用います)。よって $\forall y \in (T-\lambda_0)H$ に対して，

$$|\langle P_{\lambda_0} y, y_1 \rangle| = |\langle y, (T-\lambda_0)^{-1} y_1 \rangle| = |\langle (T-\lambda_0)(T-\lambda_0)^{-1} y, (T-\lambda_0)^{-1} y_1 \rangle|$$

$$= |\langle (T-\lambda_0)^{-1} y, (T-\lambda_0)^*(T-\lambda_0)^{-1} y_1 \rangle| \le \| (T-\lambda_0)^{-1} y \| \, \| (T-\lambda_0)^*(T-\lambda_0)^{-1} y_1 \|$$

$$\le \| (T-\lambda_0)^{-1} y \| \, \| (T-\lambda_0)(T-\lambda_0)^{-1} y_1 \| \le \| (T-\lambda_0)^{-1} y \| \, \| y_1 \|$$

より(ii)を得る。いよいよ n に関する induction によって(2)を証明する。$y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} (T-\lambda_0)^k H$ で $\|y\| = 1$ としよう。このとき，

(2-1)により

$$\| (T-\lambda_0)^{-1} y \|^2 = \langle (T-\lambda_0)^{-1} y, (T-\lambda_0)^{-1} y \rangle = |\langle P_{\lambda_0} (T-\lambda_0)^{-1} y, y \rangle|$$

$$\le \| P_{\lambda_0} (T-\lambda_0)^{-1} y \| \, \| y \| \le \| (T-\lambda_0)^{-2} y \|$$

すなわち，

$$\|(T-\lambda_0)^{-1}y\|^2 \leq \|(T-\lambda_0)^{-2}y\| \quad (2-2)$$

である。induction の仮定と (2-2) より，

$$\|(T-\lambda_0)^{-(n+1)}y\| = \left\| (T-\lambda_0)^{-n} \frac{(T-\lambda_0)^{-1}y}{\|(T-\lambda_0)^{-1}y\|} \right\| \|(T-\lambda_0)^{-1}y\|$$

$$\geq \left\| (T-\lambda_0)^{-1} \frac{(T-\lambda_0)^{-1}y}{\|(T-\lambda_0)^{-1}y\|} \right\|^n \|(T-\lambda_0)^{-1}y\| = \|(T-\lambda_0)^{-2}y\|^n \|(T-\lambda_0)^{-1}y\|^{1-n}$$

$$\geq \|(T-\lambda_0)^{-1}y\|^{2n+1-n} = \|(T-\lambda_0)^{-1}y\|^{2n+1}$$

となる。

定義　Γ を点 a を通らない長さを持つ平面上の閉曲線とする。$\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-a}$ を Γ の点 a の回りの回転数という。

次に $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{m} \Gamma_i$ で Γ_i は長さを持つ Jordan 閉曲線で，$\Gamma_i \cap \Gamma_j = \phi$ $(i \neq j)$ とする。このとき，$a \notin \Gamma$ に対して，$\mathrm{Ind}_\Gamma(a) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Ind}_{\Gamma_i}(a)$ とする。

Lemma 10　(Stampfli [12])

$T \in B(H)$ は S.V.E.P. をもち，$\sigma_p(T) = \phi$ で $x \in H$ とする。Open set Ω $(\supset \sigma_T(x))$ に対して上記の定義における $\Gamma \subset \Omega \setminus \sigma_T(x)$ を $\mathrm{Ind}_\Gamma(\lambda) = \begin{cases} 1 ; & \lambda \in \sigma_T(x) \\ 0 : & \lambda \notin \Omega \end{cases}$ にとる。このとき，

$$(T-\lambda_0)^{-n} \overset{?}{=} -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda-\lambda_0)^{-n} \hat{x}(\lambda)\, d\lambda \quad \text{for all } \lambda_0 \notin \Omega$$

($n=1, 2, \cdots$) である。

証明は Stampfli [12] 参照

Theorem 11 (Stampfli [12])

hyponormal operator T は $\sigma_p(T)=\phi$ のとき，(L. G. C.) をみたす。

証明 Stampfli の証明には部分的に誤りがある。$\|x\|=1$ として，$\|\hat{x}(\lambda)\| \leq \frac{1}{\mathrm{dist}[\lambda, \sigma_T(x)]}$ ($\forall \lambda \in \rho_T(x)$) を示せばよい。$\lambda_0 \in \rho_T(x)$ と $\forall \varepsilon > 0$，$\varepsilon < \mathrm{dist}[\lambda_0, \sigma_T(x)]$ に対して，open set $\Omega \supset \sigma_T(x)$ ($\lambda_0 \notin \Omega$) と Lemma 10 の性質をもつ $\Gamma \subset \Omega \setminus \sigma_T(x)$ を次のようにとる。

$$\mathrm{dist}[\lambda_0, \sigma_T(x)] - \varepsilon < \mathrm{dist}[\lambda_0, \Gamma]$$

Lemma 9 と Lemma 10 により，

$$\|\hat{x}(\lambda_0)\| = \|(T-\lambda_0)^{-1}x\| \leq \|(T-\lambda_0)^{-n}x\|^{\frac{1}{n}} = \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda-\lambda_0)^{-n}\hat{x}(\lambda)\,d\lambda\right\|^{\frac{1}{n}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{2\pi}\frac{M}{\mathrm{dist}[\lambda_0, \Gamma]^n}\,l(\Gamma)\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{M\,l(\Gamma)}{2\pi}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{1}{\mathrm{dist}[\lambda_0, \Gamma]}$$

$$\leq \left(\frac{M\,l(\Gamma)}{2\pi}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{1}{\mathrm{dist}[\lambda_0, \sigma_T(x)]-\varepsilon}$$

である。ここで $\|\hat{x}(\lambda)\| \leq M$ on Γ とする。$n \to \infty$，$\varepsilon \to 0$ として求める結果を得る。

Theorem 12 (Stampfli [12])

hyponormal operator T は条件(C)をみたす。

証明　Stampfli は証明に正規族に関する Montel の定理を用いてあるが、ここではそれを用いずより単純な証明を試みる。$\delta \subset \mathbb{C}$ を closed とする。$T = T/\mathfrak{M} \oplus T/\mathfrak{M}^{\perp}$ に対して、$X_T(\delta) = X_{T/\mathfrak{M}}(\delta) \oplus X_{T/\mathfrak{M}^{\perp}}(\delta)$ で、Theorem A (a) により $X_{T/\mathfrak{M}}(\delta)$ は closed であるから、$\sigma_p(T) = \phi$ と仮定してよい。ここに、$\mathfrak{M} = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \oplus \mathfrak{M}_\lambda$ で、$\mathfrak{M}_\lambda = \ker[(T-\lambda)]$ である。$x_n \in X_T(\delta)$, $x_n \longrightarrow x$ のとき、$\sigma_T(x) \subset \delta$ を示せばよい。いま $U \subset \mathbb{C} \setminus \delta$ open, $\mathrm{dist}[U, \delta] = \sigma > 0$ とする。$\sigma_T(x_n) \subset \delta$ より、$\sigma_T(x_n - x_m) \subseteq \sigma_T(x_n) \cup \sigma_T(x_m) \subset \delta$ となる。従って $\rho_T(x_n - x_m) \supset \mathbb{C} \setminus \delta$ である。Theorem 11 より、$\forall \lambda \in U$ に対して、

$$\| \hat{x}_n(\lambda) - \hat{x}_m(\lambda) \| = \| \widehat{x_n - x_m}(\lambda) \| \leq \frac{\| x_n - x_m \|}{\mathrm{dist}[\lambda, \sigma_T(x_n - x_m)]}$$

$$\leqq \frac{\| x_n - x_m \|}{\mathrm{dist}[\lambda, \delta]} \leqq \frac{\| x_n - x_m \|}{\mathrm{dist}[U, \delta]} \leqq \frac{\| x_n - x_m \|}{\sigma}$$

である。従って U 上に analytic なベクトル値関数 f があって、$\hat{x}_n(\lambda) \longrightarrow f(\lambda)$ 一様収束 on U である。$(T-\lambda) f(\lambda) = \lim_{n \to \infty} (T-\lambda) \hat{x}_n(\lambda) = \lim_{n \to \infty} x_n = x$ $(\lambda \in U)$ である。よって、$U \subset \rho_T(x)$ である。また、$\mathbb{C} \setminus \delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ で、open set U_n は $\mathrm{dist}[U_n, \delta] = \sigma_n > 0$ となるようにとれるから、$\mathbb{C} \setminus \delta \subset \rho_T(x)$ である。すなわち、

$\sigma_T(x) \subset \delta$ である。

Stampfli [12] は hyponormal operator T が nontrivial な spectral subspace をもつための条件として，次の条件をあたえた。

Corollary　T を hyponormal operator とする。正数 k，r（$0 < r < \|T\|$）と $x \neq 0$ があって，$\|T^n x\| \leq K r^n$（$n = 1, 2, ---$）ならば $X_T(\delta)$（$\delta = \sigma_T(x)$）は T の nontrivial な不変部分空間である。

証明　proposition 7 と Theorem 12 により $\sigma_T(x) \subsetneqq \sigma(T)$ を示せばよい。$x(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n x$　（$|\lambda| > r$）とおけば，$x(\lambda)$ は analytic on（$|\lambda| > r$）で，$(T-\lambda)x(\lambda) \equiv x$ である。従って，（$|\lambda| > r$）$\subset \rho_T(x)$ である。すなわち $\sigma_T(x) \subset D_r = \{\lambda \mid |\lambda| \leq r\}$ である。ところが T は normaloid だから $\lambda_0 \in \sigma(T)$，$|\lambda_0| = \|T\|$ となるものがある。$r < \|T_0\|$ より，$\sigma_T(x) \subsetneqq \sigma(T)$ である。

次に hyponormal operator は条件(R)をみたすという Clancey [2] の結果を紹介しよう。

Theorem 13.　hyponormal operator T は条件(R)をみたす。

証明には Radjabalipour の次の Lemma が必要である。

Lemma 14　（Theorem 1 in [8]）

T を hyponormal operator，$\sigma_p(T) = \phi$ で $\delta \subset \mathbb{C}$ を closed とする。$x(\lambda)$ が $\mathbb{C} \setminus \delta$ 上の有界ベクトル値関数で $(T-\lambda)x(\lambda) \equiv x$ な

らば，$x(\lambda)$ は $\mathbb{C}\backslash\delta$ 上で analytic である。

Theorem 13 の証明　Theorem A (b) により $\sigma_P(T)=\phi$ と仮定しておく。Δ を一つの開球 $\subset\mathbb{C}$ とする。$x(\lambda)$ が Δ 上のベクトル値関数で，$(T-\lambda)x(\lambda)\equiv x$ のとき，$\mathring{\Delta}$（Δ の内部）$\subset \rho_T(x)$ を示せばよい。いま $\mathring{\Delta}\cap\sigma_T(x)\neq\phi$ としよう。$F_m=\{\lambda\in\Delta\cap\sigma_T(x) \mid \|x(\lambda)\|\leq m\}$ とおけば，$\Delta\cap\sigma_T(x)=\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m$ である。はじめに，F_m closed in $\mathbb{C}$ を示す。いま $\lambda_k\in F_m$，$\lambda_k\longrightarrow\lambda_0$ とすれば $\lambda_0\in\Delta$ より $(T-\lambda_0)x(\lambda_0)=x$ である。一方 $\|x(\lambda_0)\|\leq m$ より $\{\lambda_k\}$ の部分列 $\{\lambda_{k_n}\}$ があって，$x(\lambda_{k_n})\longrightarrow\omega$ weakly $(n\to\infty)$ で $\|\omega\|\leq m$ となる。もし $\lambda_0\notin F_m$ ならば，$x(\lambda_0)\neq\omega$ である。ところが，$\forall y\in H$ に対して，

$$\langle x, y\rangle=\langle(T-\lambda_{k_n})x(\lambda_{k_n}), y\rangle=\langle(T-\lambda_0)x(\lambda_{k_n})+(\lambda_0-\lambda_{k_n})x(\lambda_{k_n}), y\rangle=\langle(T-\lambda_0)x(\lambda_{k_n}), y\rangle+\langle(\lambda_0-\lambda_{k_n})x(\lambda_{k_n}), y\rangle\longrightarrow\langle(T-\lambda_0)\omega, y\rangle$$

である。従って $(T-\lambda_0)\omega=x$ となり，$\omega\neq x(\lambda_0)$ に反する。よって F_m は closed である（Lemma 1 in [2] の結果と比べよ）。一方 $\mathring{\Delta}\cap\sigma_T(x)=\bigcup_{m=1}^{\infty}(\mathring{\Delta}\cap F_m)$ であるから F_m の closedness により，$\mathring{\Delta}\cap F_m$ は $\mathring{\Delta}\cap\sigma_T(x)$ 上の相対位相に関して closed である。局所コンパクト空間 $\mathring{\Delta}\cap\sigma_T(x)$ にベールのカテゴリー定理を適用すれば，$\mathring{\Delta}\cap\sigma_T(x)$ 上の相対位相に関して $\mathring{\Delta}\cap F_m$ が non-empty interior をもつ m がとれる。よって open set $G\subset\mathbb{C}$ が

あって，$G\cap\mathring{\Delta}\cap\sigma_T(x)\ (\neq\phi)\subset\mathring{\Delta}\cap F_m$ である。

$\mu_0\in G\cap\mathring{\Delta}\cap\sigma_T(x)$ とすれば，$D=U(\mu_0;\varepsilon)\subset G\cap\mathring{\Delta}$ に対して，

$$D\cap\sigma_T(x)\subset F_m \qquad (1)$$

である。ここに，$U(\mu_0;\varepsilon)$ は μ_0 を中心半径 $\varepsilon>0$ の開球である。

$D'=U(\mu_0;\frac{\varepsilon}{2})$ とおく。このとき，

$$\|x(\lambda)\|\leq 2m\ \left(\lambda\in D'\cap\rho_T(x)\right) \qquad (2)$$

が成立つことを示せば定理の証明はおわる。実際 $D'\subset\Delta$ で，$D'=(D'\cap\sigma_T(x))\cup(D'\cap\rho_T(x))$ であるから，(1)，(2) より，$\|x(\lambda)\|\leq 2m\ (\lambda\in D')$ となり一方 $(T-\lambda)x(\lambda)\equiv x\ (\lambda\in D')$ であるから，lemma 14 により，$x(\lambda)$ は D' 上で analytic 従って，$D'\subset\rho_T(x)$ となる。これは $\mu_0\in\sigma_T(x)\cap D'$ に矛盾するからである。

以下(2)を示す．$\lambda_0\in D'\cap\rho_T(x)$ ならば，$\lambda_0\notin\sigma_T(x)$ であるから

$\exists\nu_0\in\sigma_T(x)$; $|\lambda_0-\nu_0|=\mathrm{dist}[\lambda_0,\sigma_T(x)]>0$

である。このとき，$\nu_0\in D\cap\sigma_T(x)\subset\Delta$ であるから，$x(\nu_0)$ は意味がある。$z_0=x(\nu_0)=(T-\nu_0)^{-1}x$ とおく。このとき，

$$\sigma_T(z_0)=\sigma_T(x)\ (\text{または } \rho_T(z_0)=\rho_T(x)) \qquad (3)$$

が成立つことを証明する。まず $\rho_T(z_0)\subset\rho_T(x)$ を示そう。

$(T-\nu_0)z_0=x$，$(T-\mu)\hat{z}_0(\mu)=z_0\ (\forall\mu\in\rho_T(z_0))$ であるから；$(T-\mu)[(T-\nu_0)\hat{z}_0(\mu)]=(T-\nu_0)[(T-\mu)\hat{z}_0(\mu)]=(T-\nu_0)z_0\equiv x$ $(\forall\mu\in\rho_T(z_0))$ である。すなわち，

$$(T-\mu)h(\mu)\equiv x\ (\forall\mu\in\rho_T(z_0))\ ;$$

である。ここに $h(\mu) = (T-\gamma_0)\hat{z}_0(\mu)$ は analytic on $\rho_T(z_0)$ である。よって $\rho_T(z_0) \subset \rho_T(x)$ となる。次に $\rho_T(x) \subset \rho_T(z_0)$ を示すために，

$$z(\lambda) = \frac{\hat{x}(\lambda) - x(\gamma_0)}{\lambda - \gamma_0} = \frac{\hat{x}(\lambda) - z_0}{\lambda - \gamma_0} \quad (\forall \lambda \in \rho_T(x))$$

とおく。$z(\lambda)$ は analytic on $\rho_T(x)$ で，

$$(T-\lambda)\, z(\lambda) \equiv z_0 \quad (\forall \lambda \in \rho_T(x)) \qquad (4)$$

である。実際

$$(T-\lambda)\, z(\lambda) = \frac{1}{\lambda-\gamma_0}\Big[(T-\lambda)\hat{x}(\lambda) - (T-\lambda) z_0\Big]$$

$$= \frac{1}{\lambda-\gamma_0}\Big[x - (T-\gamma_0) z_0 - (\gamma_0-\lambda) z_0\Big]$$

$$= \frac{1}{\lambda-\gamma_0}\Big[x - x + (\lambda-\gamma_0) z_0\Big] = z_0$$

すなわち，$(T-\lambda)\, z(\lambda) \equiv z_0 \ (\forall \lambda \in \rho_T(x))$ (4) が成立つ。従って，$\rho_T(x) \subset \rho_T(z_0)$ である。

(3) と (4) より，$z(\lambda) = \hat{z}_0(\lambda) \ (\lambda \in \rho_T(x))$ であるから，$z(\lambda_0) = \hat{z}_0(\lambda_0)$ である。また，$\sigma_p(T) = \phi$ と $\lambda_0 \in \rho_T(x) \cap D' \subset \Delta$ より，$\hat{x}(\lambda_0) = x(\lambda_0)$ である。Theorem 11 と以上の結果から，

$$\frac{\| x(\lambda_0) - z_0 \|}{|\lambda_0 - \gamma_0|} = \frac{\| \hat{x}(\lambda_0) - x(\gamma_0) \|}{|\lambda_0 - \gamma_0|} = \| z(\lambda_0) \| = \| \hat{z}_0(\lambda_0) \|$$

$$\leq \frac{\|z_0\|}{\mathrm{dist}[\lambda_0, \sigma_T(z_0)]} = \frac{\|z_0\|}{\mathrm{dist}[\lambda_0, \sigma_T(x)]} = \frac{\|z_0\|}{|\lambda_0 - \gamma_0|}$$

である。従って，$\|x(\lambda_0) - z_0\| \leq \|z_0\|$ である。故に $\|x(\lambda_0)\| \leq 2\|z_0\|$ $= 2\|x(\gamma_0)\| \leq 2m$ である。すなわち；(2) が示された。

次に cohyponormal operator T の不変部分空間の問題を考える。問題の性質上 $\sigma(T) = \sigma_C(T)$ と仮定していい。このとき，T は S. V. E. P. をもつ。更に，Stampfli [12] により，

$$\exists\, x, y \neq 0 : \sigma_T(x) \cap \sigma_T(y) = \phi$$

が示されている。$\sigma_T(x) \subsetneqq \sigma(T)$ であるけれども T が条件 (C) をみたすかどうかは不明であるので，$\overline{X_T(\sigma_T(x))} \neq H$ とは限らない。従って $\overline{X_T(\sigma_T(x))} \neq H$ を保障するための条件が問題になる。

定義　$T \in B(H)$ が条件 (B) をみたすとは，$K > 0$ が存在して，

$y_1, y_2 \in H$，$\sigma_T(y_1) \cap \sigma_T(y_2) = \phi$ ならば，

$$\|y_1\| \leq K\|y_1 + y_2\|$$

をみたすことである。このとき，次の定理が成立つ。

Theorem 15　(Stampfli [12])

cohyponormal operator T が条件 (B) または (C) をみたすならば，T は non trivial な不変部分空間をもつ。

証明　$x, y \neq 0$ in H で，$\sigma_T(x) \cap \sigma_T(y) = \phi$ としよう。T が条件 (C) をみたせば，$X_T(\sigma_T(x))$ が求める subspace である。次に T が条件 (B) をみたすとしよう。$\forall u \in X_T(\sigma_T(x))$ に対して，

$\sigma_T(-u) = \sigma_T(u) \subset \sigma_T(\alpha)$であるから，$\sigma_T(-u) \cap \sigma_T(y) = \phi$である。
よって，$\frac{1}{k}\|y\| \leq \|y-u\|$より，$y \notin \overline{X_T(\sigma_T(\alpha))}$となって，
$\overline{X_T(\sigma_T(\alpha))}$が求める subspace となる。

§5 dominant operator T の quasi-affine transform と関連する問題として，次の問題がある。

$$T = AB \ (A = A^*, \ B = B^*)$$

とする。TまたはA，Bがどんな性質をもてば，Tは normal operator になるか。Tを dominant operator に限定して，この問題を考えてみよう。

Theorem 16 (Radjabalipour [10])

$T = AB$ $(A = A^*,\ B = B^*)$とする。このとき，

(1) Tが M-hyponormal operator ならば，Tは normal operator である。

(2) Tが dominant operator で $A \geq 0$ ならば，Tは normal operator である。

証明は省略する。

Theorem 17 $T = AB$で$A \geq 0$，Bを cohyponormal operator とする。このとき，Tが dominant operator で $AB = BA$ ならば，Tは normal operator である。

証明 $AB = BA$であるから，$\ker[A]$はA，Bの reducing subspace である。$H = \ker[A] \oplus (\ker[A])^\perp$上へのA，Bの

matrix 表現を考えると，

$$T = AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1B_2 \end{pmatrix}$$

となる。ここに，B_2 は $A_1B_2 = B_2A_1$ で co hyponormal であり，$A_1 \geqq 0$ である。$T_1 = T/(\ker[A])^{\perp} = A_1B_2$ とおけば，$T_1A_1^{\frac{1}{2}} = A_1^{\frac{1}{2}}(A_1^{\frac{1}{2}}B_2A_1^{\frac{1}{2}})$ である。T_1 は dominant，$A_1^{\frac{1}{2}}B_2A_1^{\frac{1}{2}}$ は co hyponormal で $A_1^{\frac{1}{2}}$ は quasi-affinity であるから，Theorem 2 より T_1 は normal operator である。従って T は normal operator である。

参考文献

[I] I. Colojoara and C. Foias, The theory of generalized spectral operators, Gordon and Breach, New York, 1968

[2] K. F. Clancey, On the spectra of semi-normal operators, proc. Amer. Math. soc. 72 (1978) 473-479

[3] R. G. Douglas, On majorization, factorization and range inclusion of operators on the Hilbert-space, proc. Amer. Math. soc. 17 (1966), 413-415

[4] N. Dunford and J. Schwartz, Linear Operators, part III, Spectral Operators, Wiley-interscience, New York, 1971

[5] C. R. Putnam, Ranges of normal and subnormal operators, Michigan Math. J. 18 (1972), 33-36

[6] ——————, Resolvent vectors, invariant subspaces and sets of zero capacity, Math. Ann. 205 (1973), 165-171

[7] ——————, Hyponormal contractions and strong power convergence, Pac. J. Math. 57 (1975), 531-538

[8] M. Radjabalipour, Ranges of hyponormal operators, Illinois J. Math. 21 (1977), 70-75

[9] ——————, On majorization and normality of operators, Amer. Math. Soc. Vol 62 (1977), 105-110

[10] C. S. Lin and M. Radjabalipour, On intertwining and factorization by self-adjoint operators, Canad. Math. Bull. Vol 21 (1) (1978), 47-51

[11] T. Saito, Hyponormal operators and related topics, Lecture Notes in Math. 247, Springer-Verlag,

1972, 534 – 665

[12] J. G. Stampfli, A local spectral theory for operators, V. Trans. Amer. Math. soc. 217 (1976) 285 – 296

[13] J. G. Stampfli and B. L. Wadhwa, An asymmetric-Putnam-Fuglede theorem for dominant operators, Indiana Univ. Math. J. 25 (1975), 359 – 365

[14] ——————————, On dominant-operators, Monatshefte für Math. 84 (1977) 143 – 153

[15] B. L. Wadhwa, M-hyponormal operators, Duke-Math. J. 41 (1974) 655 – 660